

# La trigonometria prima della trigonometria

Maurizio Berni

9 maggio 2010

Negli istituti tecnici agrari la trigonometria viene affrontata:

nella seconda classe in Disegno e Topografia (risoluzione di triangoli e quadrilateri)

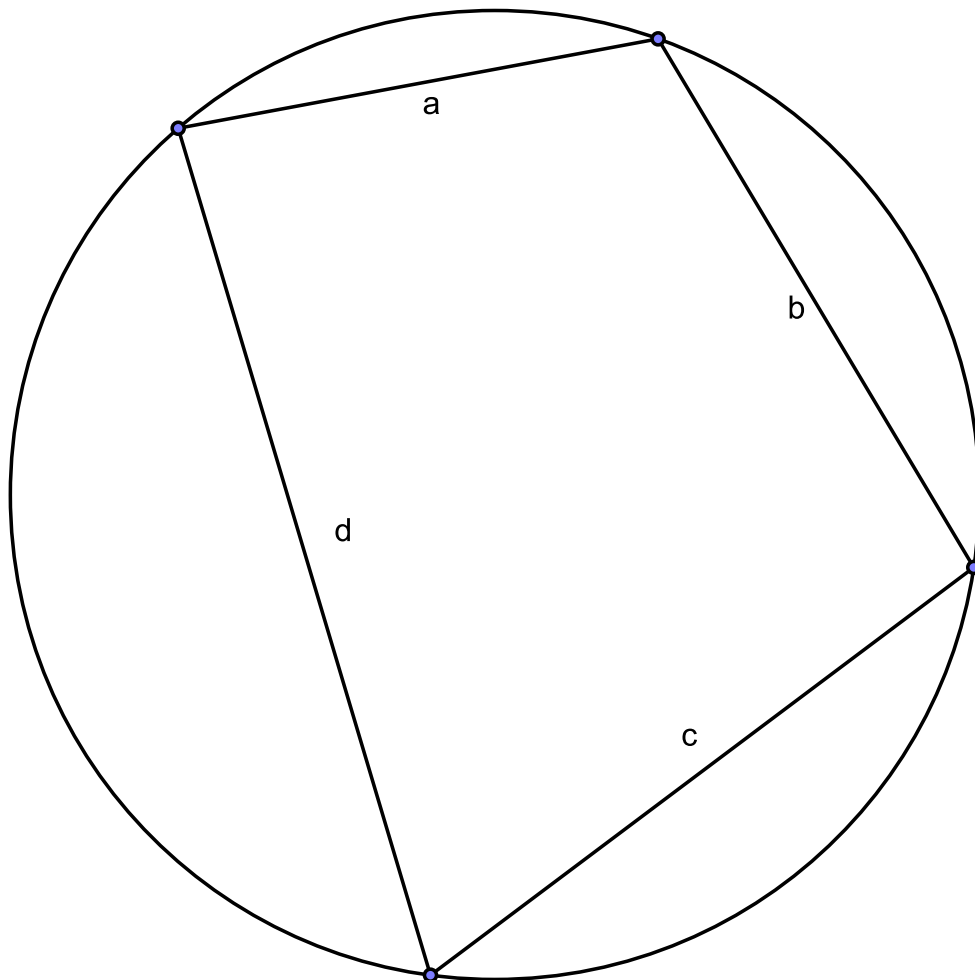
nella terza classe in matematica (formule goniometriche, equazioni goniometriche (?), risoluzione di triangoli, ...)

Quando gli studenti sanno già 'risolvere' triangoli e quadrilateri, che cosa resta alla matematica (anche in termini di motivazione degli studenti ad apprendere altro?)

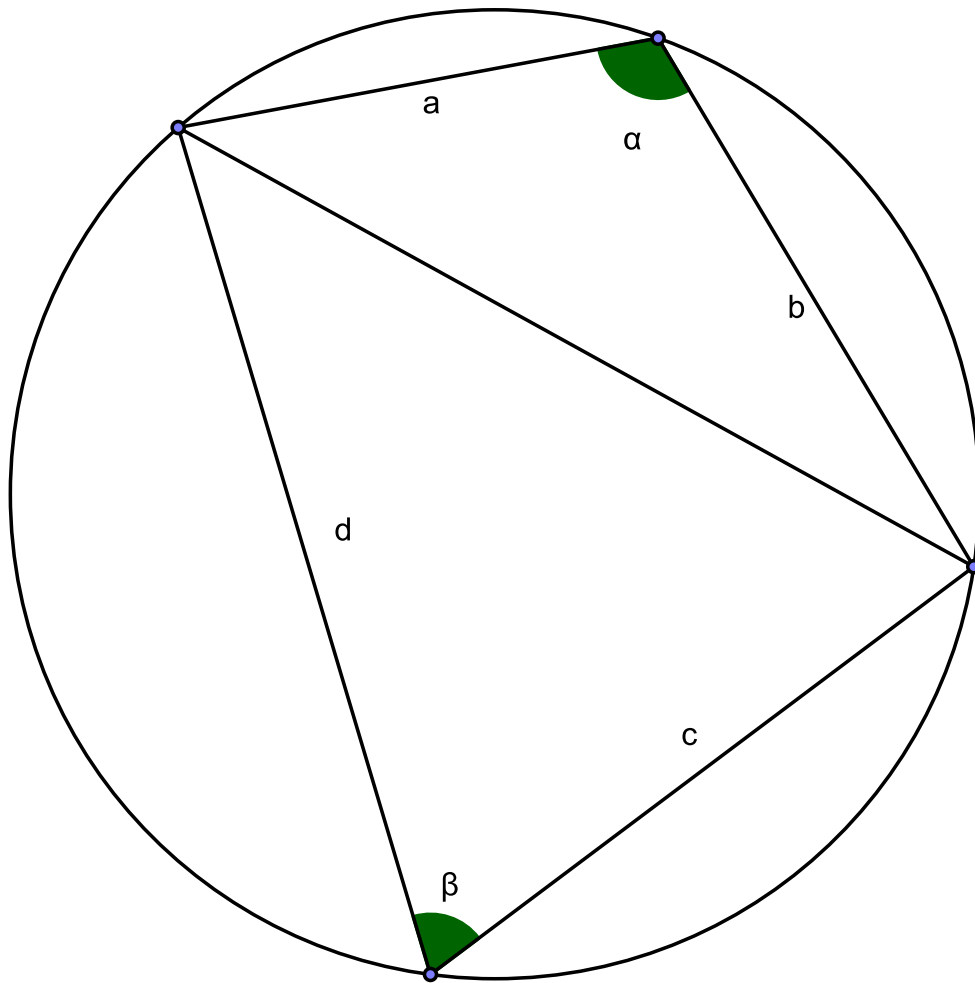
Quello che segue è la traccia di un percorso effettuato negli ultimi anni in questo tipo di istituto, nella classe terza.

## PARTE I - PARTIAMO DALLE COSE NOTE E PONIAMOCI NUOVI PROBLEMI

**Problema 1.** E' possibile calcolare l'area di un quadrilatero inscritto in una circonferenza, utilizzando solo le misure dei lati?



...occorrono anche due angoli:



...e si trova:

$$A_{ABCD} = \frac{1}{2} (ab \sin \alpha + cd \sin \beta)$$

...in realtà, essendo il quadrilatero inscritto, i due angoli opposti sono supplementari, quindi

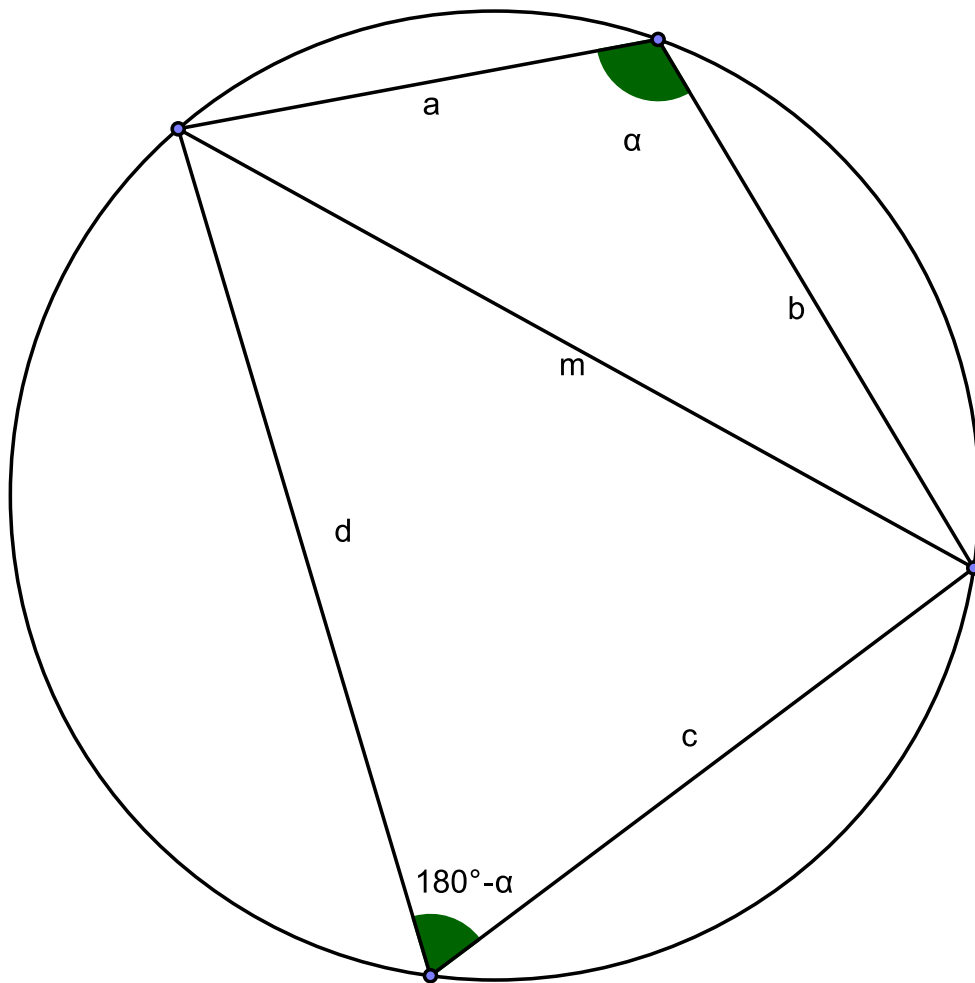
$$\sin \alpha = \sin \beta$$

dunque occorre un solo angolo e non due!

Ma c'è un teorema che lega lati e angoli, almeno per un triangolo, è il teorema di Carnot;

certo che per applicare il teorema di Carnot qui occorre mettere in gioco la diagonale che non conosciamo...

ma la *stessa* diagonale compare in due triangoli, questo ci permette di impostare un sistema e di eliminarla!



$$m^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha$$

$$m^2 = c^2 + d^2 - 2cd \cos \beta$$

Poiché  $\alpha$  e  $\beta$  sono supplementari

$$\cos \beta = -\cos \alpha$$

quindi

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha = c^2 + d^2 + 2cd \cos \alpha$$

Dunque, come per i triangoli, abbiamo anche nei quadrilateri inscritti un legame tra angoli e lati:

$$\cos \alpha = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{ab + cd}$$

Sostituendo nella formula dell'area, e svolgendo molti calcoli (istruttivi) basati sui prodotti notevoli, si ottiene la formula

$$A_{ABCD} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

detta *formula di Brahmagupta*.

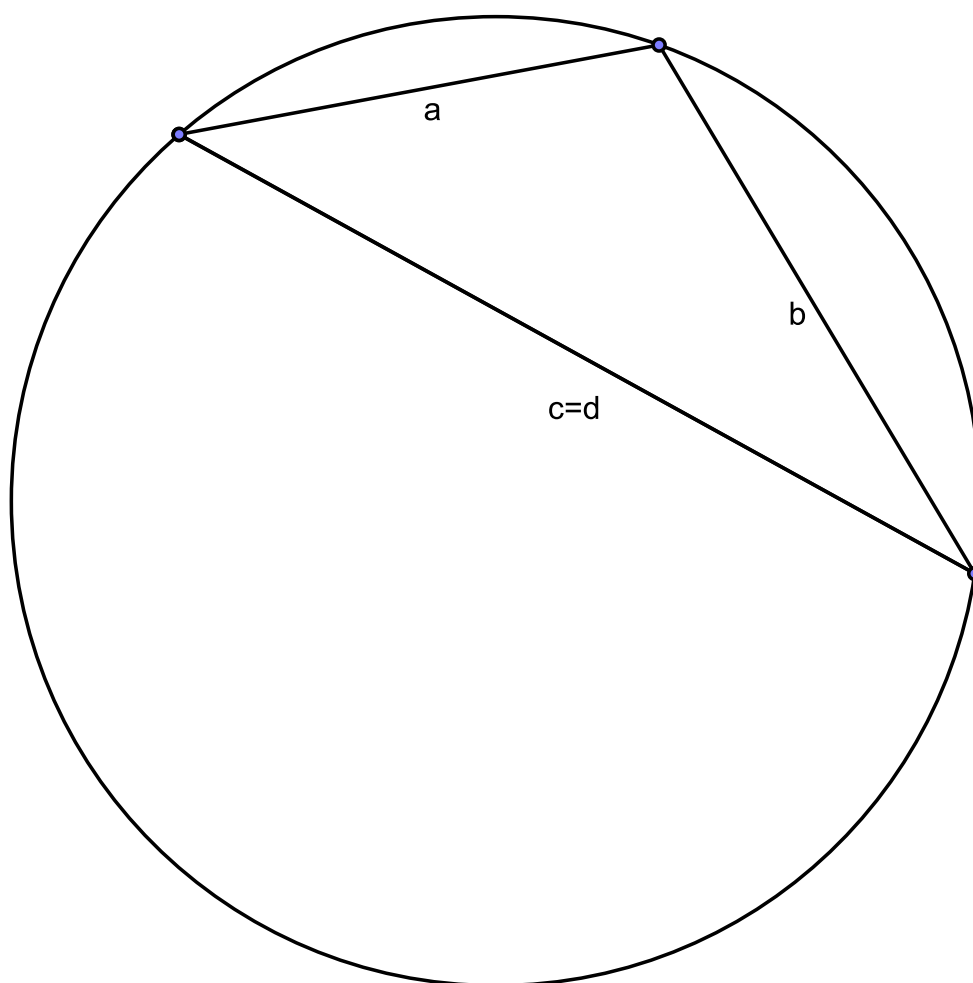
Brahmagupta è stato un matematico e astronomo indiano vissuto tra il 598 e il 668 d.C..

Dunque la sua formula, che abbiamo ricavato con la trigonometria, precede di molti secoli la nascita 'ufficiale' di questa scienza!

Infatti la nascita della trigonometria moderna viene fatta risalire al 1533, anno in cui fu pubblicato il trattato *De triangulis omnimodis* di Regiomontano, in realtà composto nel 1464 (secondo De Bernart).

## PARTE II - E ORA FACCIAMO UN BALZO ALL'INDIETRO

Si può considerare un triangolo come il caso limite di un quadrilatero inscritto, con un lato di lunghezza nulla.



In questo caso la formula di Brahmagupta diventa (supponiamo  $d = 0$ ):

$$A_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

cioè la *Formula di Erone*

*Erone di Alessandria* è un matematico vissuto tra il I e il II secolo d.C.

## PARTE III - ARCHI NOTEVOLI

Da un'attività sui triangoli rettangoli con angoli di  $30^\circ$  e  $60^\circ$ , oppure rettangoli isosceli, si ricavano i valori delle funzioni goniometriche per i cosiddetti *archi notevoli*;

essi possono essere riassunti nella seguente tabella (consideriamo solo gli angoli compresi tra  $0$  e  $90^\circ$ ):

$\alpha$	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

La tabella può essere memorizzata scrivendo tutte le frazioni con denominatore 4 e numeratore 0, 1, 2, 3, 4:

$$\frac{0}{4} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{2}{4} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{4}{4}$$

e mettendo queste frazioni sotto radice quadrata:

$$\sqrt{\frac{0}{4}} \quad \sqrt{\frac{1}{4}} \quad \sqrt{\frac{2}{4}} \quad \sqrt{\frac{3}{4}} \quad \sqrt{\frac{4}{4}}$$

Per i coseni basta leggerla da destra a sinistra la stessa tabella.

Ma... mentre da  $30^\circ$  a  $45^\circ$ , e da  $45^\circ$  a  $60^\circ$  c'è un salto di  $15^\circ$ , da  $0^\circ$  a  $30^\circ$ , e da  $60^\circ$  a  $90^\circ$ , c'è un salto di  $30^\circ$ ! Non possiamo raffinare la tabella, almeno per avere intervalli regolari di  $15^\circ$ ? Si può fare grazie alle *formule di addizione e sottrazione*.

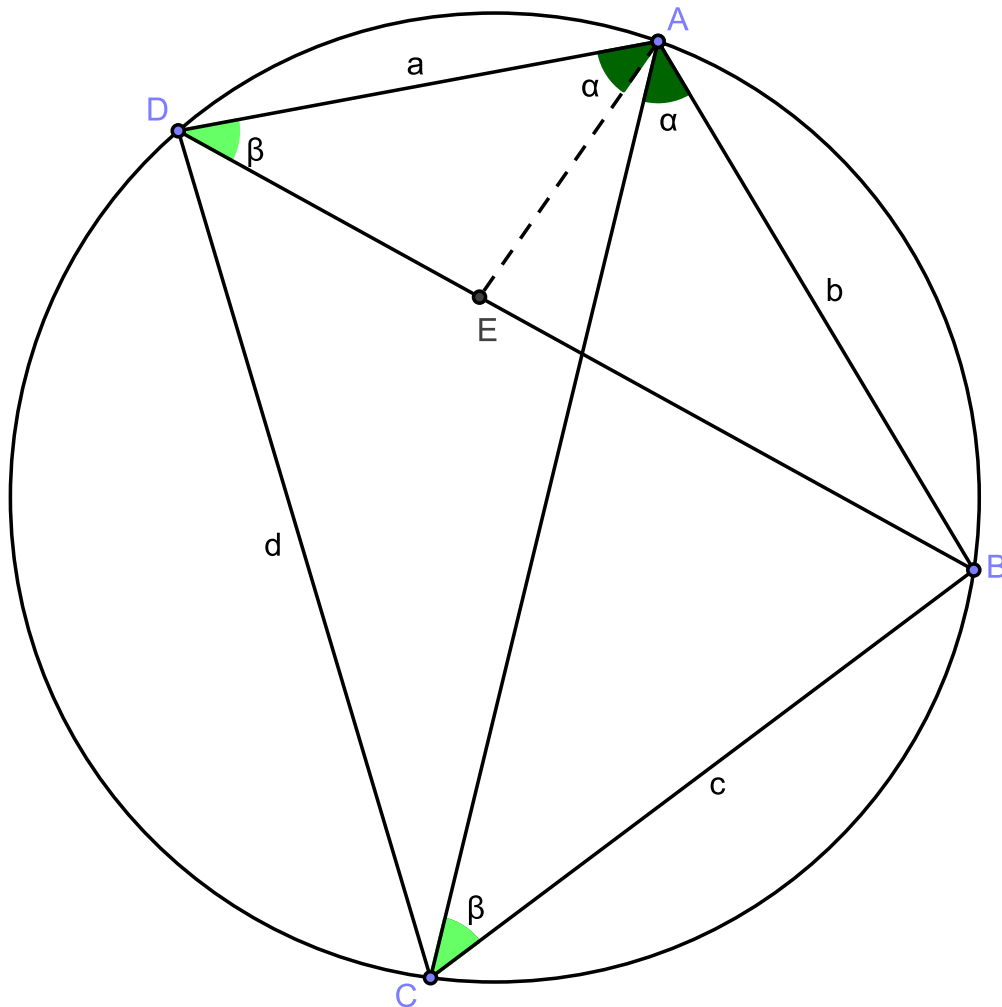
## PARTE IV - IL TEOREMA DI TOLOMEO.

Tali formule vengono dimostrate sui libri di testo con un procedimento tecnico, senza storia, e privo di interesse storico.

In realtà gli antichi greci possedevano una *geometria delle corde* i cui risultati comprendevano, sotto altra forma, quelle che oggi leggiamo come *formule di addizione e sottrazione*.

In particolare, il teorema di Tolomeo è una bellissima applicazione della similitudine, esprime un risultato inatteso e poco intuitivo, e di fatto dimostra le formule.

Si parte di nuovo da un quadrilatero inscritto in una circonferenza, si tracciano le diagonali, e supponendo che la diagonale non sia bisettrice dell'angolo in  $A$ , si individua nella parte maggiore un angolo uguale alla parte minore; nella figura:  $\widehat{DAE} = \widehat{CAB}$ .



Con le proprietà degli angoli alla circonferenza, si dimostra che ci sono due coppie di triangoli simili:

$$AED \simeq ABC$$

$$ADC \simeq AEB$$

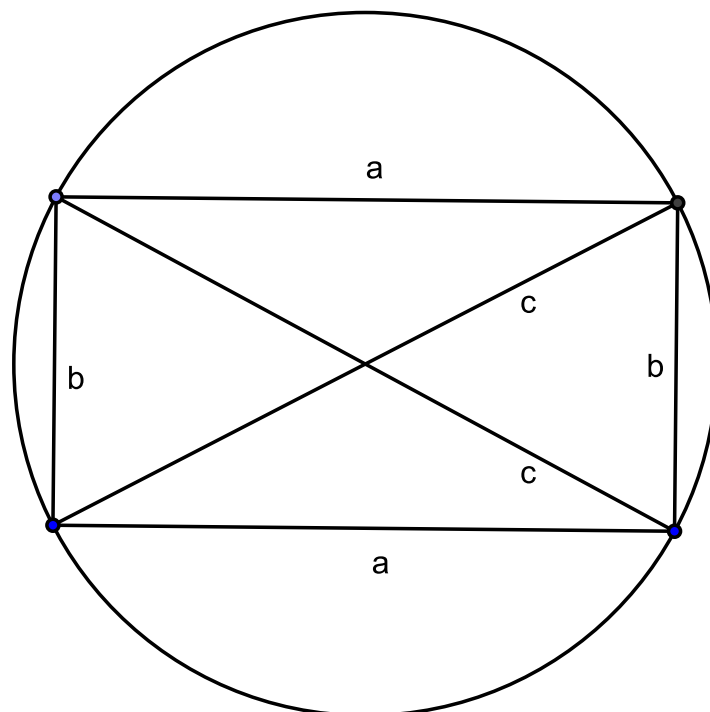
Impostando le proporzioni tra i lati, si ricava, dopo alcuni calcoli:

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AC \cdot BD$$

ovvero

*In un quadrilatero inscritto in un cerchio, il prodotto delle diagonali è uguale alla somma dei prodotti dei lati opposti.*

È un teorema molto potente (oltre che 'bello') che contiene il teorema di Pitagora come caso particolare: basta considerare un rettangolo.

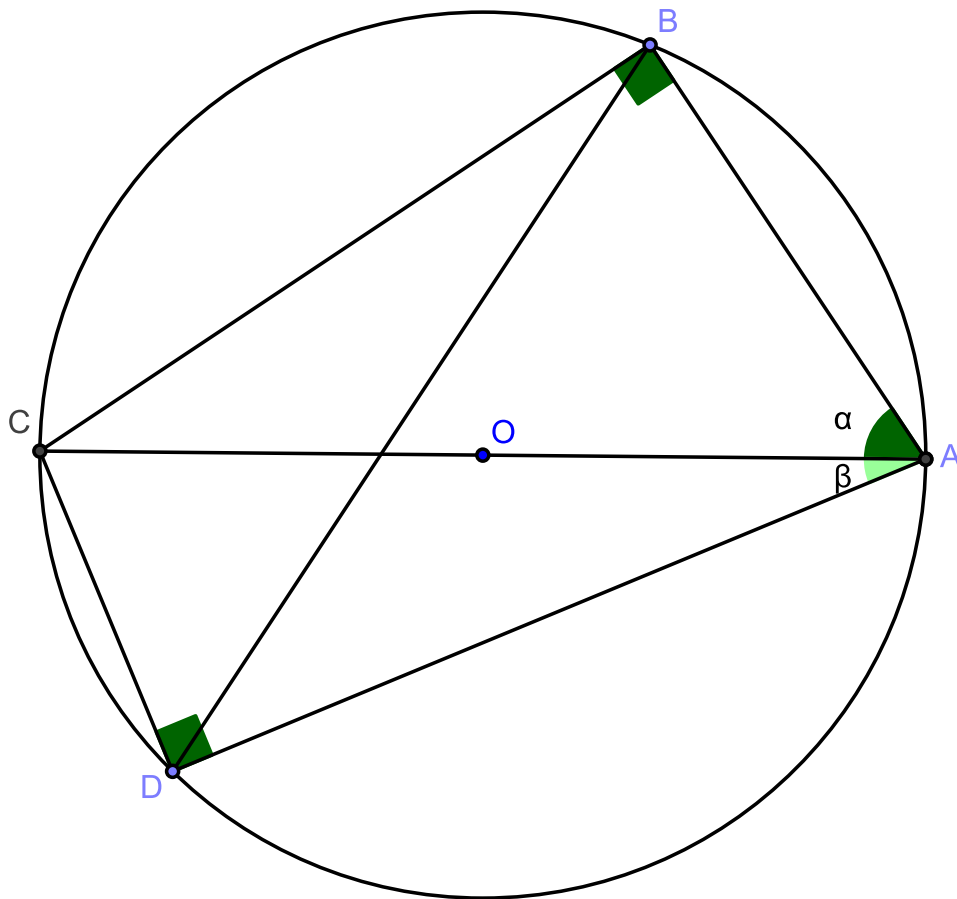


$$c \cdot c = a \cdot a + b \cdot b$$

Per dimostrare la formula di addizione del seno col teorema di Tolomeo

si disegna un quadrilatero inscritto con una diagonale coincidente col diametro, che si suppone unitario

si applicano i teoremi sui triangoli rettangoli e il teorema della corda (vedi figura)



$$AC=1 ; BD=\sin\alpha ;$$

$$AB=\cos\alpha ; BC=\sin\alpha ; CD=\sin\beta ; AD=\cos\beta$$

In modo analogo si trovano formule per il seno della differenza

Tolomeo visse tra il 100 e il 175 d.C. (circa); anch'egli era di Alessandria di Egitto.

Grazie a queste formule possiamo costruire

$$\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) =$$

$$\sin 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 30^\circ \cdot \cos 45^\circ$$

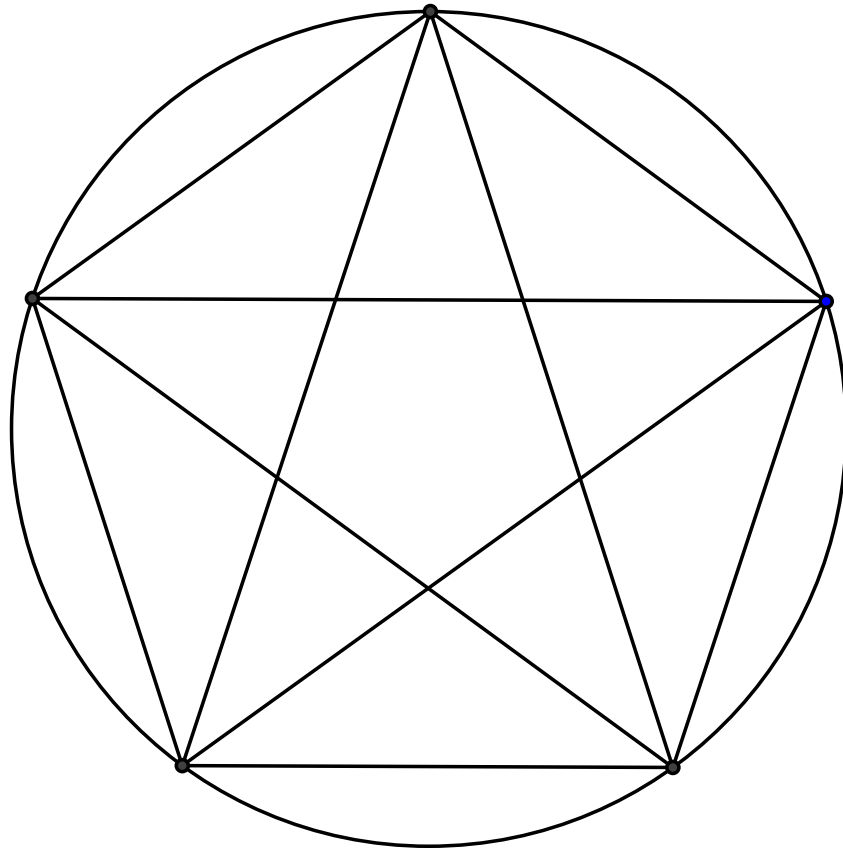
$$\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) =$$

$$\sin 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cdot \cos 45^\circ$$

Per il coseno di somma e differenza basta passare agli angoli complementari.

## PARTE V - UN POSSIBILE RAFFINAMENTO: L'ANGOLO DI $18^\circ$

Il pentagono regolare, con le sue diagonali, è una figura ricchissima di proprietà, che possono essere indagate direttamente dagli studenti, in una classe seconda (vedi figura);



Determina le misure di tutti i segmenti in figura  
(considerando unitario il lato del pentagono), e le ampiezze di tutti gli angoli.

esse coinvolgono molti importanti argomenti  
del curriculum del biennio superiore:

uguaglianza di triangoli

somma degli angoli interni di un poligono

similitudine

equazioni di secondo grado

Grazie a questa attività, è assai naturale calcolare il seno di  $18^\circ$ , che risulta essere la metà della *sezione aurea* del segmento unitario.

In via teorica, questo permette di avere una tabella di valori delle funzioni goniometriche con intervalli di soli 3 gradi (anche se in pratica sono molto complicati da esprimere per radicali); infatti:

$$\sin 3^\circ = \sin(18^\circ - 15^\circ)$$

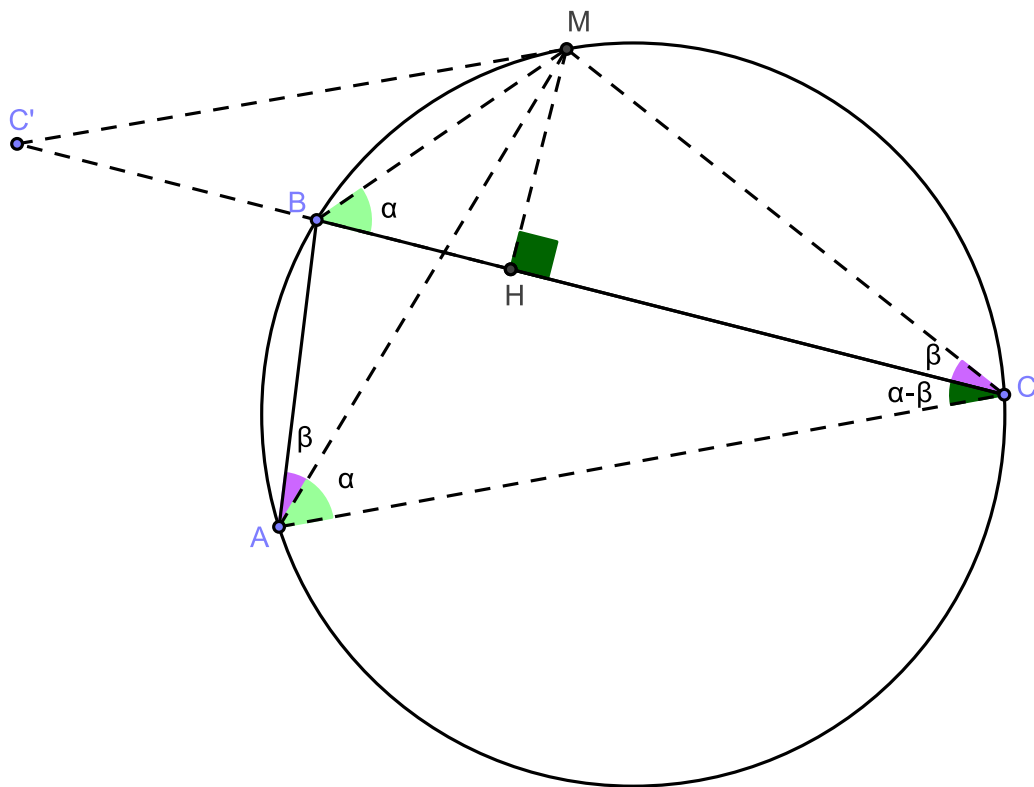
## PARTE VI

### ARCHIMEDE CONOSCEVA GIA' QUESTE FORMULE?

(Possibile approfondimento).

In realtà Archimede (Siracusa, 287 a.C., 212 a.C.) ci tramanda un teorema, detto *della corda spezzata*:

Se  $AB$  e  $BC$  sono due corde consecutive di un cerchio (una corda spezzata, appunto), il punto medio  $M$  dell'arco  $AC$  si proietta sulla corda spezzata nel suo punto medio (vedi figura).



$$AB + BH = HC$$

$$AB = \sin(\alpha - \beta); \quad BH = \sin\beta \cos\alpha; \quad HC = \sin\alpha \cos\beta$$