CLASSIFICAZIONE DI POLIGONI

Giuliano Spirito

Scuola Media, 2005

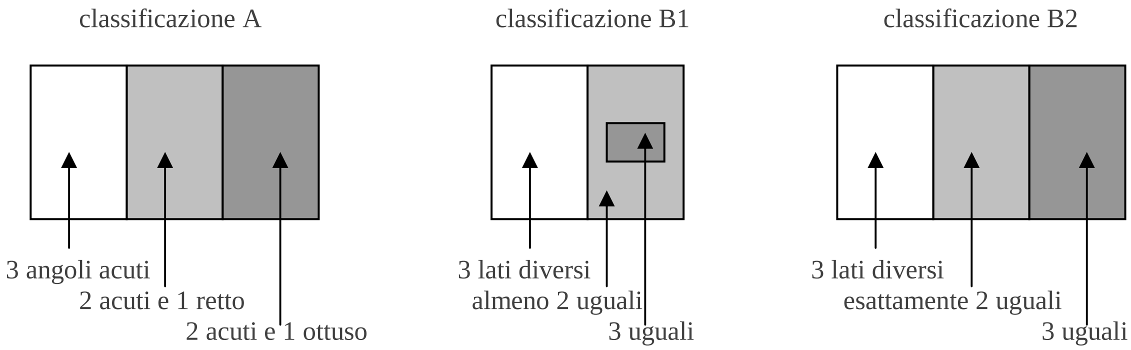
Niente di più statico, noioso, ripetitivo del classificare le figure! Così è, certamente, all'interno di una didattica tradizionale, dove la geometria si riduce a definizioni, formule e applicazioni. Eppure… eppure la classificazione di poligoni può esser occasione di momenti di discussione aperta, può suscitare osservazioni non scontate, può persino dar luogo a qualche sorpresa; può, in altre parole, intrecciarsi in modo ricco e fecondo a attività di tipo laboratoriale. Purché, però, gli insegnanti stessi siano consapevoli della complessità dei processi classificatorii.

Forse il punto di avvio della nostra riflessione può allora essere questo: quanto ci siamo soffermati a ragionare sulle varie e differenti tipologie di classificazione delle figure geometriche (ma non solo di esse)? quanto abbiamo esaminato vantaggi e problemi peculiari di ciascun tipo di classificazione? Intendiamo qui riferirci non tanto ai distinti criteri di classificazione delle figure, che possono essere i più svariati senza che necessariamente la classificazione cambi natura, bensì proprio agli elementi "strutturali" delle classificazioni, che possono risultare profondamente diversi. Un esempio servirà a chiarire il nostro discorso. Immergiamoci dunque, per avviare il nostro ragionamento, nel mondo dei triangoli e esaminiamo le più consuete classificazioni che si effettuano in questo ambito:

classificazione A: acutangoli, rettangoli, ottusangoli

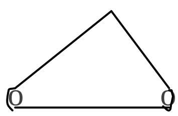
classificazione B: scaleni, isosceli, equilateri

Quali sono le differenze tra le due classificazioni? In primo luogo, salta agli occhi che la A ha a che fare con gli angoli e la B con i lati. Questo è vero, ma non è tutto: infatti la classificazione A ha a che fare con le proprietà dei singoli componenti (per attribuire un triangolo a una delle tre classi devo esaminare singolarmente ciascuno dei suoi angoli); mentre la B attiene alla relazione tra i componenti (per attribuire un triangolo a una delle tre classi devo confrontare tra loro i tre lati). Infine: la classificazione A costituisce una *partizione* (suddivisione dell'insieme universo in classi che coprono l'intero universo e *che sono tra loro disgiunte*), mentre la B è quanto meno ambigua, dal momento che non è chiaro se un triangolo equilatero sia da considerare come un caso particolare di triangolo isoscele (classificazione B1) o no (classificazione B2). La scelta tra le due possibili accezioni B1 e B2 della B non riguarda solo il privilegio di una o un'altra convenzione linguistica, ma anche lo schema logico sottostante all'azione definitoria.

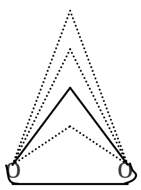


Le partizioni (A e B2) sono certamente le classificazioni più lineari, quelle più facili da capire e da ritenere. Questo non significa rinunciare a forme di classificazione più sofisticate (B1); una volta che si sia preso coscienza della loro maggiore complessità – e dunque si siano adottate tutte le "precauzioni" del caso – esse offrono l'opportunità di *stabilire relazioni* tra figure in modo più profondo e significativo.

I problemi di classificazione dei triangoli si intrecciano con molteplici attività. Supponiamo, ad esempio, di assumere come materiale di base uno spago "annodato" fissato in due punti:



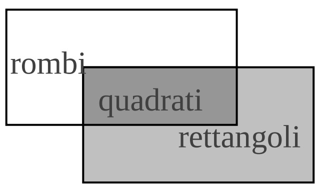
"Spostando" il terzo vertice si osserverà che il caso particolare non è quello del triangolo ottusangolo, bensì quello del triangolo rettangolo, spartiacque tra gli infiniti casi di triangoli acutangoli e gli infiniti casi di triangoli ottusangoli (in contrasto con il vissuto degli alunni, abituati a incontrare frequentemente angoli retti e di rado angoli ottusi negli oggetti che li circondano). Sempre dalla manipolazione del medesimo materiale, scaturisce un analogo discorso per i triangoli isosceli, altamente "improbabili" rispetto ai triangoli scaleni, benché molto più frequenti nei manufatti.
Utilizzando un materiale di base simile, in cui però lo spago è sostituito da un elastico, è possibile visualizzare il fatto che il triangolo equilatero costituisce un caso particolare e "raro" del triangolo isoscele:



Ovviamente si tratta solo di esempi, ognuno dei quali, peraltro, tale da stimolare ulteriori domande e osservazioni; molti altri materiali si potrebbero utilizzare in questa chiave. Ci preme di più, però, suggerire un'indicazione per un'attività di laboratorio "carta e penna", attività che mette in relazione le due classificazioni (per misura degli angoli e per confronto tra i lati) precedentemente proposte. Dunque, in questo caso la consegna è, data la seguente tabella, quella di disegnare, in ciascuna casella dove sia possibile, un triangolo con le due caratteristiche indicate nelle intestazioni della riga e dalla colonna (con l'effetto – tra l'altro – di evidenziare le incompatibilità nascoste nelle due classificazioni, quella basata sulle caratteristiche degli angoli e quella basata sulle relazioni tra i lati).

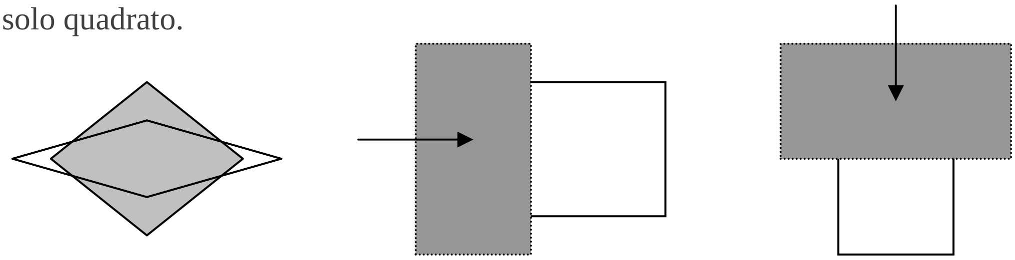
	scaleno	isoscele	equilatero
acutangolo			
rettangolo			
ottusangolo			

Ma il mondo in cui le attività di classificazione e le relative problematiche acquistano davvero interesse è quello dei quadrilateri. La classificazione più ovvia e tradizionale è basata su proprietà dei lati e degli angoli della figura; ma anch'essa, a meno di forzature, sconta il fatto di non essere una partizione. Con la conseguente e già segnalata difficoltà per alunne e alunni: se disegniamo alla lavagna un quadrato e chiediamo loro se si tratti di un rombo, la risposta, risoluta e corale, sarà negativa, come negativa sarà la risposta alla domanda se si tratti di un rettangolo. La classificazione abituale, quella che deriva dalla definizione del rombo come quadrilatero con 4 lati uguali (senza particolari vincoli sugli angoli) e del rettangolo come quadrilatero con 4 angoli uguali (senza particolari vincoli sui lati), risulta per un verso non immediata, per altro verso non persistente, proprio perché non dà luogo a una partizione.



La necessità di organizzare un lavoro specifico su queste figure, anche di tipo manipolativo, corrisponde all'esigenza (non certo unica, ma significativa) di far sedimentare l'idea del quadrato come caso limite del rombo e del rettangolo.

Per mostrare che il quadrato non è altro che un rombo “speciale” può essere utile unire con dei fermacampione 4 listarelle di cartoncino rigido tra loro uguali: avvicinando e allontanando due vertici non consecutivi, salta agli occhi la preziosa particolarità dell’unico quadrato che si forma. Per mostrare che il quadrato è un rettangolo “speciale” può essere utile far scivolare un cartoncino scuro sulla sagoma di un rettangolo: muovendo il cartoncino in una direzione parallela al lato più lungo del rettangolo si ottengono rettangoli tutti con la stessa altezza (o con la stessa base) , tra cui c’è uno e un solo quadrato.



Ovviamente le costruzioni illustrate si prestano a molti altri quesiti (ad esempio: che cosa succede dei perimetri, che cosa succede delle aree?) e stimolano riflessioni e osservazioni di vario tipo; qui ci limitiamo a evidenziare le questioni inerenti la classificazione delle figure.
Anche le domande se un rombo o un rettangolo, disegnati alla lavagna, siano dei parallelogrammi, o se un parallelogramma disegnato alla lavagna sia un trapezio mettono in difficoltà allieve e allievi: la risposta che otteniamo è infatti, generalmente, in entrambi i casi negativa. Di nuovo, entra in gioco la difficoltà di governare una classificazione di tipo non partitorio: le definizioni di rombo e rettangolo hanno come conseguenza il parallelismo delle coppie di lati opposti (e dunque designano rombi e rettangoli come particolari parallelogrammi); la definizione di parallelogramma (lati a 2 a 2 paralleli) prevede il verificarsi di una condizione che è comprensiva della condizione (più debole: almeno 2 lati paralleli) che caratterizza il trapezio (e dunque designa i parallelogrammi come particolari trapezi). Insomma, ci troviamo davanti, nel caso della classificazione dei quadrilateri, a un processo classificatorio “per inclusione”, corrispondente a vincoli crescenti (o decrescenti, se percorsa nell’altro verso):

Quadrilatero
4 lati

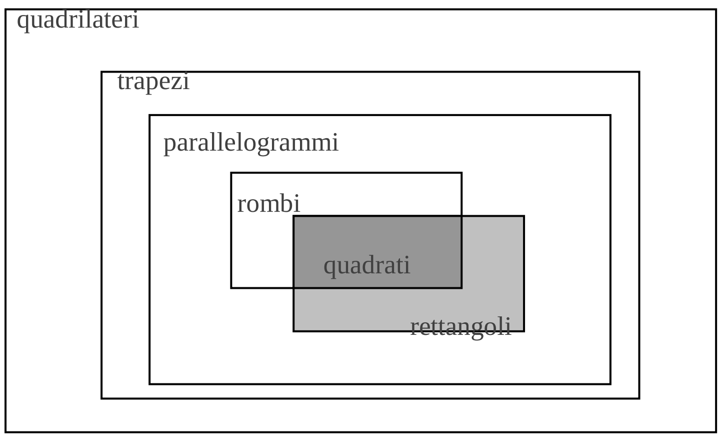
Trapezio
4 lati
2 lati paralleli

Parallelogramma
4 lati
lati a 2 a 2 paralleli

Rombo
4 lati
lati a 2 a 2 paralleli
lati uguali

Rettangolo
4 lati
lati a 2 a 2 paralleli
angoli uguali

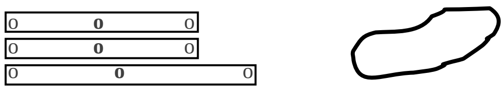
Quadrato
4 lati
lati a 2 a 2 paralleli
lati uguali
angoli uguali



La classificazione “per inclusione” che deriva da vincoli ulteriori è certamente complessa e richiede un lavoro specifico per essere introiettata (non è intuitivo che l’*aumento* delle richieste produca una *diminuzione* degli oggetti che le soddisfano tutte). Sarà certamente utile, per familiarizzare alunne e alunni con questa tipologia di classificazione, far riferimento anche a situazioni non matematiche, proponendo giochi e attività, oltreché spunti di riflessione, sul tema.

In geometria (ma solo in geometria) i quadrati sono più rari dei rombi
Il fatto che i quadrati siano più rari dei rombi non è strano perché le richieste che facciamo a un quadrilatero per dargli il nome di quadrato sono due (lati uguali e angoli uguali), mentre per dargli il nome di rombo ci contentiamo di una sola richiesta (lati uguali). Quindi, per essere degni del nome di quadrato bisogna superare un esame più severo di quello previsto per essere chiamati rombi.
Proprio come quel cane che davanti alla zuppa pensò: se sei buona abbaio festosamente, ma se sei buona e profumata faccio anche qualche salto di gioia… Il rombo è come una zuppa buona, ma il quadrato è come una zuppa buona e profumata!
Da tutta questa storia si può trarre una morale generale: più sono le specialità di una figura e più questa figura è rara.
Questo, logicamente, è vero in geometria, dove le figure che si possono pensare, solo perché si possono pensare esistono tutte! Diverso è il discorso nella realtà, dove esistono solo gli oggetti che, dopo essere stati pensati, sono stati anche costruiti! Ebbene, gli esseri umani hanno costruito molti più oggetti a forma di quadrato che oggetti a forma di rombo. I quadri appesi alle pareti sono spesso di forma quadrata (se no perché si chiamerebbero *quadri*?), i quadretti del tuo quaderno sono quadrati (non per niente si chiamano *quadretti* e non *rombetti*!); ma anche tavoli, mattonelle e tovaglioli sono spesso di forma quadrata. Quindi, nella vita di tutti i giorni, la forma rara è quella del rombo, non certo quella del quadrato!
da "Il racconto della matematica", manuale per la scuola media di G.Spirito-M.D'Onofrio-G.Petrini, Ed.La Nuova Italia

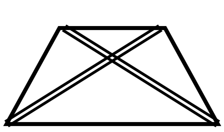
Nei quadrilateri è possibile effettuare una classificazione (in larga misura coincidente con quella abituale) a partire da un criterio completamente diverso: invece di basarsi sulle caratteristiche dei lati (lunghezza e parallelismo) e degli angoli (ampiezza) è possibile basarsi sulle caratteristiche delle diagonali (lunghezza e posizione reciproca). Qui davvero la classificazione può scaturire con naturalezza da un’attività di manipolazione. Basterà far costruire tre listarelle di cartoncino pesante, due di lunghezza uguale e una più lunga, ciascuna con un fermacampioni alle due estremità e con un foro al centro e munirsi di un elastico:



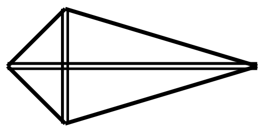
Procedendo in modo ordinato all’esame dei vari casi, congiungendo ogni volta le due listarelle nel punto di mezzo e ponendo ogni volta l’elastico in modo che si agganci ai fermacampioni, sarà possibile costruire e poi riempire la seguente tabella:

	perpendicolari	**non perpendicolari**
uguali	quadrato	rettangolo
non uguali	rombo	parallelogramma

Un’attività di questo tipo può suscitare curiosità anche rispetto al caso in cui le listarelle non siano congiunte nel loro punto di mezzo, conducendo alla costruzione (a partire dalle diagonali!) del trapezio isoscele e del deltoide:



listarelle uguali
congiunte in punti corrispondenti

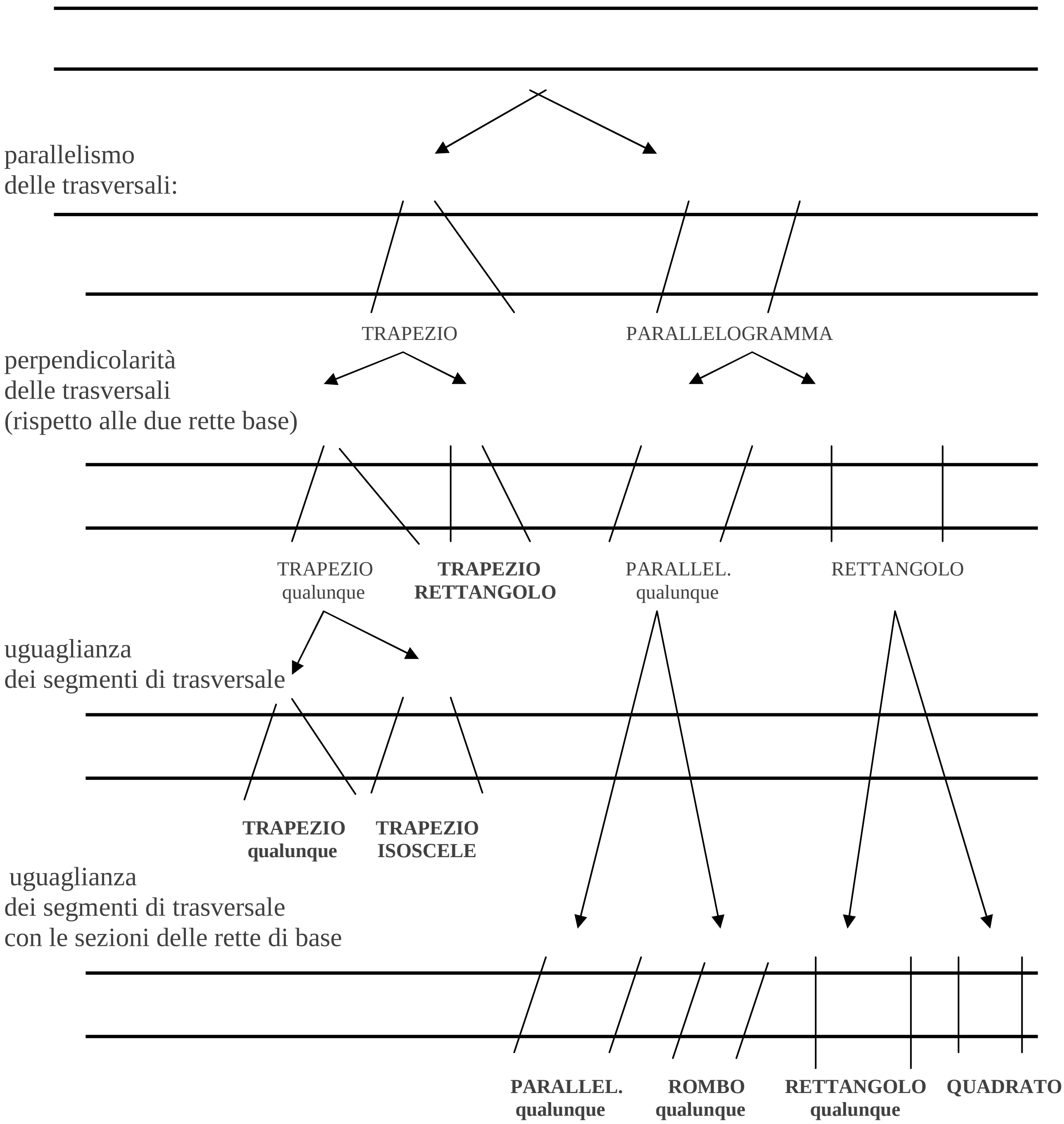


listarelle diverse
congiunte nel punto di mezzo
di una sola delle due

Vogliamo sottolineare che il carattere laboratoriale di questa attività non deriva soltanto e forse neanche principalmente dalla presenza di un aspetto manipolativo nella stessa, quanto dal fatto di procedere in modo esaustivo all’esame di una casistica e alla ordinata e meditata trascrizione dei risultati che si registrano di volta in volta. Laboratorio – lo ripetiamo ancora una volta – non è necessariamente e esclusivamente manipolazione e sperimentazione concreta; laboratorio è, prima di tutto, seguire un percorso i cui esiti non siano noti in partenza e che dunque coinvolga e sviluppi un'attitudine osservativa e riflessiva.

Siamo ora pronti a proporre un’altra modalità di classificazione dei quadrilateri, che presenta alcune caratteristiche interessanti e che è molto “consonante” con un’impostazione laboratoriale dei problemi di classificazione. L’idea di partenza è che tutti i quadrilateri “notevoli” hanno almeno due lati paralleli; e dunque da lì – da due rette parallele tagliate da due trasversali - prendiamo le mosse.

Possiamo pensare di distinguere secondo una serie successiva di criteri che danno luogo, ogni volta, a una biforcazione:



La classificazione appena proposta presenta tre aspetti su cui riflettere:

a) tutti i parametri di classificazione sono “relazionali”
b) è una classificazione di tipo partitorio
c) è il frutto di una vera e propria attività di ricerca di elementi di regolarità e di elementi di distinzione (e dunque rappresenta un ottimo esercizio di classificazione, al di là del suo interesse geometrico)

La scommessa era quella di mostrare che classificare può essere il portato di un’attività (e non solo la conseguenza meccanica dell’apprendimento di alcune definizioni); l’immersione nel mondo dei poligoni (e, in particolare, dei quadrilateri) si è rivelata, da questo punto di vista, ricca di spunti, aperta a varie possibilità, occasione di significative osservazioni e scoperte. Dunque, forse, la scommessa non è stata del tutto persa…